Backtesting von Risikofunktionalen

Hannover Insurance Day 2022

Sören Bettels (House of Insurance)

Der Vortrag basiert auf gemeinsamer Arbeit mit Sojung Kim und Stefan Weber

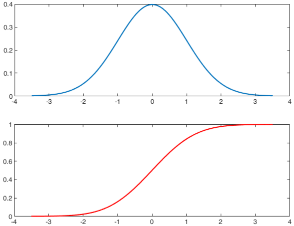
Leibniz Universität Hannover

5. September 2022

Problemstellung

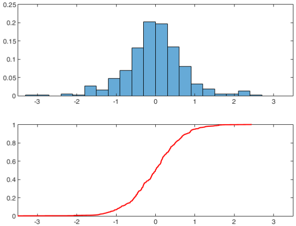
- **Backtesting** ist die Validierung von Risikomodellen mittels der Gegenüberstellung von beobachteten Daten mit Risikoprognosen und/oder der modellierten Gewinn- und Verlustverteilung.

Modell: $M_1, M_2, \ldots, M_n$



$\overset{?}{\Leftrightarrow}$

Daten: $L_1, L_2, \ldots, L_n$



Motivation

Anwendung:

- **Modellanalyse:**
  - Validierung aufgestellter Risikomodelle
  - Beispiele: Bilanzprojektionen, Gesamtschadenmodelle, Investmentportfolios
- **Validierung von Risikofunktionalen:**
  - Implizit oder explizit
  - Beispiele: Value at Risk, Average Value at Risk

Ziel:

- Backtestingmethoden sollten die folgenden Kriterien erfüllen:
  - Gute Resultate bei **kleinen** Mengen beobachteter Daten
  - Sensitiv bezüglich des zu testenden Risikofunktionals
  - Mit **hoher Wahrscheinlichkeit** werden **Modellfehler** erkannt
  - Mit **niedriger Wahrscheinlichkeit** werden **korrekte Modelle** abgelehnt

Herausforderung und Ansatz

Herausforderung

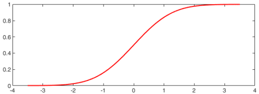
In Anwendungen sind Modelle und Daten oft komplex, nicht unabhängig und identisch verteilt.

- Ein direkter Vergleich der empirischen Verteilung der Daten mit dem Modell ist nicht möglich.
- Häufig ist eine Fokusierung auf Tail-Risiken besonders wichtig.

Ansatz

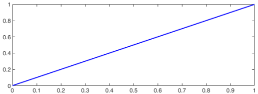
Finde eine Transformation des Modells dessen Verteilung unabhängig von der Verteilung des Modells selber ist.

Modell: $M_1, M_2, \ldots, M_n$



$$\overset{F_{M_t}(L_t)}{\Longrightarrow}$$

Daten: $L_1, L_2, \ldots, L_n$

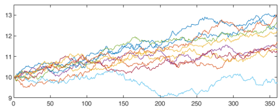


Der Ansatz von Rosenblatt (1952)

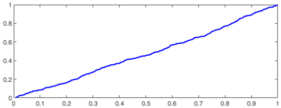
Methode

$$U_1 := F_{M_1}(L_1) = \mathrm{P}(M_1 \leq L_1)$$
$$U_2 := F_{M_2|M_1}(L_2|L_1) = \mathrm{P}(M_2 \leq L_2|M_1 = L_1)$$
$$U_3 := F_{M_3|M_2,M_1}(L_3|L_2, L_1) = \mathrm{P}(M_3 \leq L_2|M_2 = L_2, M_1 = L_1)$$
$$\vdots$$

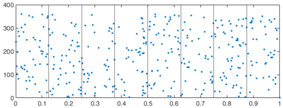
- Wenn die Daten vom Modell stammen, so sind die $U_1, \ldots, U_n$ unabhängig gleichverteilt auf $[0, 1]$.
- Wende χ^2-Test an, um die Verteilung zu testen.



$\Rightarrow$



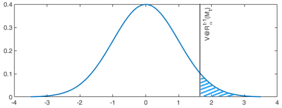
$\Rightarrow$



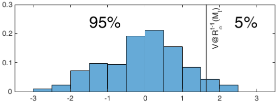
- Test auf der ganzen Verteilung des Modells; globale Analyse ohne Fokus auf Tails.

Der Ansatz von Christoffersen (1998)

$$\mathrm{V@R}_\alpha^{t-1}(M_t) = \inf\{m | F_{M_t|M_{t-1},\dots,M_1}(m) \geq 1-\alpha\}$$
$$= \text{“Der kleinste Wert, den } M_t \text{ mit Wahrscheinlichkeit größer } 1-\alpha \text{ nicht überschreitet.”}$$



$\Rightarrow$



Methode

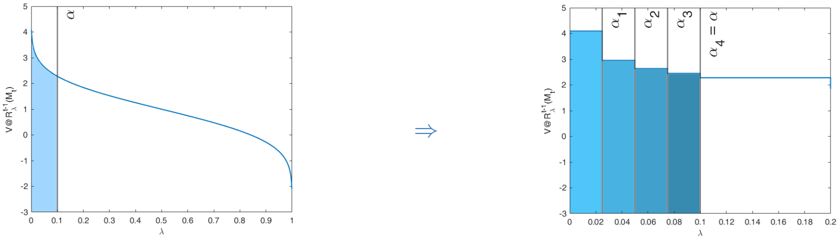
- Wir betrachten die Transformation $\mathbb{1}_t := \mathbb{1}_{\{L_t > \mathrm{V@R}_\alpha^{t-1}(M_t)\}}$.
- Wenn die Daten vom Modell stammen, sind die $(\mathbb{1}_t)_{t=1,\dots,n}$ unabhängig Bernoulli verteilt mit Wahrscheinlichkeit α.
- Mit einem Likelihood Ratio Test können beide Eigenschaften getestet werden.

- Expliziter Test für $\mathrm{V@R}_\alpha^{t-1}(M_t)$ für alle $t \in \{1,\dots,n\}$.

Der Ansatz von Kratz, Lok, McNeil (2016)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{AV@R}_{\alpha}^{t-1}(M_t) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_0^{\alpha} \mathrm{V@R}_{\lambda}^{t-1}(M_t)\,d\lambda \\
&= \text{“Arithmetisches Mittel der } \mathrm{V@R}_{\lambda}^{t-1}(M_t) \text{ mit } \lambda \leq \alpha\text{”} \\
&\approx \frac{1}{m+1}\left(\mathrm{V@R}_{\alpha_1}^{t-1}(M_t) + \cdots + \mathrm{V@R}_{\alpha_{m+1}}^{t-1}(M_t)\right),
\end{aligned}
$$

wobei $\alpha_j := \frac{j}{m+1}\alpha$.



Der Ansatz von Kratz, Lok, McNeil (2016)

Methode

- Betrachte folgende Transformationen:

$$X_t = \sum_{j=1}^{m+1} \mathbb{1}_{\{L_t > \mathrm{V@R}_{\alpha_j}^{t-1}(M_t)\}} \qquad O_i = \sum_{t=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_t = i\}}.$$

- Wenn die Daten vom Modell stammen, folgt $(O_0, \ldots, O_m)$ einer $\mathrm{MN}\left(n, (\alpha/(m+1), \ldots, \alpha/(m+1), 1-\alpha)\right)$ Verteilung.
- Auf diese Verteilung kann mit Standardmethoden getestet werden.

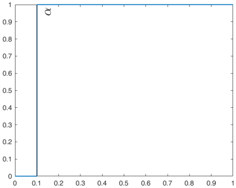
- Impliziter Test für $\mathrm{AV@R}_\alpha^{t-1}(M_t)$ für alle $t \in \{1, \ldots, n\}$.

Der Ansatz von Bettels, Kim, Weber (2022)

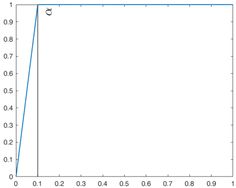
Große Klasse von Risikofunktionalen und Verbesserung der Methode:

$$
\begin{aligned}
\rho_g^{t-1}(M_t) &= \int_{[0,1]} \mathrm{V@R}_\lambda^{t-1}(M_t)\,dg(\lambda) \\
&= \text{“Gewichtetes Mittel der } \mathrm{V@R}_\lambda^{t-1}(M_t) \text{ mit } \lambda \in [0,1]\text{”} \\
&= \mathsf{E}\left[\mathrm{V@R}_G^{t-1}(M_t)\right]
\end{aligned}
$$

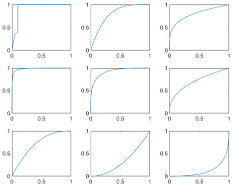
Value at Risk:



Average Value at Risk:



Weitere Beispiele:



Der Ansatz von Bettels, Kim, Weber (2022)

Methode

- Betrachte die Partition $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_m < \alpha_{m+1} = 1$.
- $G_{t,j}$ sei G bedingt auf $[\alpha_{j-1}, \alpha_j)$ für $j \in \{1, \ldots, m+1\}$ und beschreibe die Randomisierung der Level.
- Betrachte folgende Transformationen:

$$X_t = \sum_{j=1}^{m+1} \mathbb{1}_{\{L_t > \mathrm{V@R}_{1-G_{t,j}}^{t-1}(M_t)\}}, \qquad O_i = \sum_{t=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_t = i\}}.$$

- Wenn die Daten vom Modell stammen, folgt $(O_0, \ldots, O_{m+1})$ einer $\mathrm{MN}(n, (p_0, p_1, \ldots, p_{m+1}))$ Verteilung.
- Auf diese Verteilung kann mit Standardmethoden getestet werden.

- Impliziter Backtest für $\rho_g^{t-1}(M_t)$ für alle $t \in \{1, \ldots, n\}$.

Der Ansatz von Bettels, Kim, Weber (2022)

		Nass						
L_t	$n\|m$	1	2	4	8	16	32	64
$\mathcal{N}$	250	0.79	0.95	1.05	1.12	1.01	1.08	1.05
	500	0.77	0.97	0.94	1.03	1.08	1.03	1.10
	1000	0.88	1.11	0.93	1.03	1.08	1.12	1.10
	2000	0.83	0.97	0.99	1.02	1.01	1.08	1.11
T3	250	16.26	21.61	21.97	25.54	20.41	20.89	22.73
	500	27.82	37.00	41.95	44.80	41.51	45.66	38.55
	1000	51.06	65.32	73.06	75.30	74.13	74.07	67.04
	2000	83.04	93.36	96.78	97.64	97.27	95.98	94.62
T5	250	17.31	20.83	20.21	22.53	19.60	20.44	19.46
	500	25.00	30.43	34.07	37.00	34.69	34.52	30.85
	1000	41.93	50.69	56.35	58.89	59.13	58.52	53.65
	2000	67.67	77.70	84.69	87.26	87.48	86.43	83.57
ST	250	35.43	41.40	41.73	46.53	42.03	43.10	43.64
	500	54.33	63.24	69.56	73.59	71.25	73.45	67.83
	1000	81.55	89.66	92.81	94.49	94.74	94.41	93.00
	2000	97.84	99.45	99.76	99.88	99.94	99.87	99.82

Tabelle: AV@R Backtest: Geschätztes Niveau und Macht in % bei normalverteilter Nullhypothese. Das Niveau ist ausgedrückt als Bruch des geschätzten Niveaus durch das angestrebte Niveau von 5%.

Fazit

- **Backtesting** beschreibt mathematische Methoden zum Vergleich und zur Validierung von Modellen und Daten.
- Ansatz: Betrachte geeignete Transformationen von Modellen und Daten, die eine Anwendung von Standardmethoden ermöglichen.
- Forschungsfragen:
  - Welche Transformationen ergeben sich in Abhängigkeit des statistischen Modellrahmens und der verwendeten Risikofunktionale?
  - Wie quantifiziert man die Effizienz von Backtestingmethoden?

Quellen

- Bettels, Sören, Sojung Kim and Stefan Weber. “Multinomial Backtesting of Distortion Risk Measures” arXiv preprint arXiv:2201.06319 (2022).
- Christoffersen, Peter F. “Evaluating Interval Forecasts” International Economic Review (1998)
- Christoffersen, Peter F. and Denis Pelletier. ”Backtesting Value-at-Risk: A Duration-Based Approach” Journal of Financial Econometrics 2.1 (2004)
- Kratz, Marie, Yen H. Lok, and Alexander J. McNeil. “Multinomial VaR Backtests: A Simple Implicit Approach to Backtesting Expected Shortfall” Journal of Banking & Finance 88 (2018)
- Rosenblatt, Murray. “Remarks on a Multivariate Transformation” The Annals of Mathematical Statistics 23.3 (1952)